المحاضرة السابعة

ملاحظة 1: اذا كان لدينا معادلة فريدهولم التكاملية

① $g(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)\,g(t)\,dt$

λ ليست قيمة خاصة و $k(x,t)$ نواة متردية

ويفرض ان $f_i=0$

$g(x)=f(x)$

الاثبات: حل المعادلة يعطى بالدستور التالي

$g(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n} c_i a_i(x)$ ☆

علماً ان c_i تحدد من المعادلات الجبرية

$f_i+\lambda\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}c_j=c_i \qquad i=1,2,\dots,n$

وعندما $f_i=0$ فان المعادلات الجبرية

تأخذ شكل التالي $\lambda\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}c_j=c_i \qquad i=1,2,\dots,n$

وهي مجموعة معادلات جبرية متجانسة وبما ان λ ليست قيمة خاصة

$c_1=c_2=\dots=c_n=0$

$c_i=0 \qquad i=1,2,\dots,n$

نبدل في ☆ فنحصل $g(x)=f(x)$

ملاحظة 2:

لدينا معادلة فريدهولم التكاملية ①

$k(x,t)$ نواة متردية و λ ليست قيمة خاصة

و $\alpha_{ij}=0$

الاثبات: حل المعادلة ① يعطى بالدستور

$g(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)\,f(t)\,dt$

الاثبات

لدينا حل المعادلة يعطى بالدستور

$g(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n} c_i a_i(x)$ ☆

علماً ان c_i تحدد من المعادلات الجبرية

$f_i+\lambda\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}c_j=c_i \qquad i=1,2,\dots,n$

$f_i=\int_a^b b_i(t)\,f(t)\,dt$

وعندما $\alpha_{ij}=0$ فان

$f_i=c_i=\int_a^b b_i(t)\,f(t)\,dt$

نبدل هذه العبارة في ☆ فنحصل على

$g(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n} f_i\,a_i(x)$

$=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b b_i(t)\,f(t)\,dt\right)a_i(x)$

$=f(x)+\lambda\int_a^b\left(\sum a_i(x)\,b_i(t)\right)f(t)\,dt$

وبما ان $k(x,t)$ متردية فان

$k(x,t)=\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,b_i(t)$

تطبيقات متنوعة

مثال: بيّن انه ليس للمعادلة التكاملية

① $g(x)=f(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x+t)\,g(t)\,dt$

اي حل عندما $f(x)=x$ ولكن لا عدد غير منتهي من الحلول عندما $f(x)=1$ ثم اوجد هذه الحلول

~~Sol~~

$k(x,t)=\sin(x+t)=\sin x\cos t+\cos x\sin t$

النواة $k(x,t)$ متردية عندما $n=2$

$g(x)=f(x)+\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{2} c_i a_i(x)$

$a_1(x)=\sin x \qquad a_2(x)=\cos x$

$b_1(t)=\cos t \qquad b_2(t)=\sin t$

$g(x)=f(x)+\frac{1}{\pi}c_1\sin x+\frac{1}{\pi}c_2\cos x$ ②

c_1, c_2 ثوابت

$$f_i + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} C_j = C_i \quad ; i = 1,2$$

$$\left.\begin{aligned} f_1 + \frac{1}{\pi}\alpha_{11} C_1 + \frac{1}{\pi}\alpha_{12} C_2 &= C_1 \\ f_2 + \frac{1}{\pi}\alpha_{21} C_1 + \frac{1}{\pi}\alpha_{22} C_2 &= C_2 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$f_i = \int_0^{2\pi} b_i(t) f(t)\, dt$$

$$f_1 = \int_0^{2\pi} \cos t\, f(t)\, dt$$

$$f_2 = \int_0^{2\pi} \sin t\, f(t)\, dt$$

$$\alpha_{ij} = \int_0^{2\pi} b_i(t)\, a_j(t)\, dt$$

$$\alpha_{11} = \int_0^{2\pi} \cos t \sin t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2t\, dt = 0 \qquad \boxed{\alpha_{11} = 0}$$

$$\alpha_{12} = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \cos t\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \pi \qquad \boxed{\alpha_{12} = \pi}$$

$$\alpha_{21} = \int_0^{2\pi} \sin t \sin t\, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = \pi \qquad \boxed{\alpha_{21} = \pi}$$

$$\alpha_{22} = \int_0^{2\pi} \sin t \cos t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2t\, dt = 0 \qquad \boxed{\alpha_{22} = 0}$$

بالتعويض في ③ نجد

$$\left.\begin{aligned} f_1 + C_2 &= C_1 \\ f_2 + C_1 &= C_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} C_1 - C_2 &= f_1 \\ -C_1 + C_2 &= f_2 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

[illegible] $\lambda = \frac{1}{\pi}$

حسب نظرية فريدهولم التكاملية البديلة

$\int \psi(x) f(x)\, dx \neq 0$ ليس لها حل

وإذا كان $\int \psi(x) f(x)\, dx = 0$ لها عدد لانهائي من الحلول

حيث $\psi(x)$ حل مرافق المعادلة المتجانسة

مع الدالة $f(x)$ المعطاة متعامدة

هذا يعني أن المعادلات الجبرية المقابلة

المتجانسة مقابلة المعادلات الجبرية المرافقة

المعادلة المتجانسة أي حل مرافق المعادلة

المتجانسة هو نفسه حل المعادلة الجبرية

المعادلة الجبرية المتجانسة المرافقة ④ هي

$$\left.\begin{aligned} C_1 - C_2 &= 0 \\ -C_1 + C_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} C_1 &= C_2 \quad \forall C_2 \\ C_2 &= C_1 \quad \forall C_1 \end{aligned}$$

معناه إيجاد عدد لانهائي من الحلول [illegible]

يساوي الواحد

وبالتالي حل المعادلة المرافقة

نعوض في العلاقة ② مع عدم الأخذ [illegible]

مع العلم أن $f(x) = 0$ [illegible]

$$g(x) = \frac{1}{\pi} C_1 \sin x + \frac{1}{\pi} C_1 \cos x$$

$$g(x) = \frac{1}{\pi} C_1 (\sin x + \cos x)$$

$$\psi(x) = g(x) = \frac{1}{\pi} C_1 (\sin x + \cos x) \text{ حل}$$

مثال ① $f(x) = x$ $\boxed{\text{حل}}$

$$\frac{1}{\pi} C_1 \int_0^{2\pi} (\sin x + \cos x)\, x\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} C_1 \left[x(-\cos x + \sin x)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-\cos x + \sin x)\, dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} C_1 \left[(2\pi(-1)) - (-\sin x - \cos x)\Big|_0^{2\pi} \right]$$

/ /

$= -2C_1 \neq 0$

المعادلة ليس لها أي حل

$f(x) = 1$ ②

$\frac{1}{\pi} C_1 \int_0^{2\pi} (\sin x + \cos x)\, dx$

$= \frac{1}{\pi} C_1 \left[-\cos x + \sin x\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} C_1 (-1 \ldots)$

$= 0$

لا عدد لانهائي من الحلول

ايجاد هذه الحلول

$f_1 = \int_0^{2\pi} \cos T\, dT = 0$

$f_2 = \int_0^{2\pi} \sin T\, dT = \left[\sin T\right]_0^{2\pi} = 0$

نعوض في المعادلات ④

$C_1 = C_2 \quad \forall C_2$

نعوض في ②

$g(x) = 1 + \frac{1}{\pi} C_2 \sin x + \frac{1}{\pi} C_2 \cos x$

وهو الحلول المطلوبة $\forall C_2$

$\frac{\lambda}{2}$

$f(x) = x$ ③

$f_1 = \int_0^{2\pi} \cos T \cdot T\, dT$

$= T \sin T \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin T\, dT = 0$

$f_2 = \int_0^{2\pi} \sin T \cdot T\, dT$

$= -T\cos T \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos T\, dT = -2\pi$

بالتعويض بالمعادلات ④ ⑤

$C_1 - C_2 = 0$

$-C_1 + C_2 = -2\pi$

نلاحظ هذه المعادلات مع المعادلات ④

نجد أن $C_1 = C_2$ تناقض مع المعادلة الثانية

$C_1 - C_2 = -2\pi$ ... $-C_1 + C_2 = -2\pi$

$f(x) = 1$ ②

$f_1 = \int_0^{2\pi} \cos T\, dT = 0$

$f_2 = \int_0^{2\pi} \sin T\, dT = 0$

$C_1 - C_2 = 0 \\ -C_1 - C_1 = 0$ } $C_1 = C_2 \quad \forall C_2$

حالات المعادلة لها عدد لانهائي من الحلول

④ المعادلة عدد لانهائي من الحلول

المعادلات التكاملية التي ترد الى معادلات تكاملية متناظرة

اثبت ان النواة في المعادلة التكاملية الاتية ترد الى نواة متناظرة

اثبت ان النواة في المعادلة التكاملية الآتية ترد الى نواة متناظرة ثم اكتب المعادلة

$$① \quad g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, p(t)\, g(t)\, dt$$

علماً ان $k(x,t)$ دالة متناظرة

حيث ان $p(t) > 0$ موجب في المجال $[a,b]$

الحل نضرب طرفي المعادلة ① بـ $\sqrt{p(x)}$ فنحصل على

$$\sqrt{p(x)}\, g(x) = \sqrt{p(x)}\, f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, p(t) \sqrt{p(x)}\, g(t)\, dt$$

نعوض بتابع مجهول جديد هو

$$\psi(x) = \sqrt{p(x)}\, g(x)$$

مع العلم ان

$$p(t) = \sqrt{p(t)}\, \sqrt{p(t)}$$

$$\psi(x) = \sqrt{p(x)}\, f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \sqrt{p(t)\,p(x)}\, \psi(t)\, dt$$

$$L(x,t) = K(x,t) \sqrt{p(t)\,p(x)}$$

وهي نواة متناظرة $K(x,t) = K(t,x)$

وذلك لأن

$$L(t,x) = K(t,x) \sqrt{p(x)\,p(t)}$$

صارت $K(x,t)$ نواة متناظرة هذا يعني أن

$$L(x,t) = L(t,x)$$

أي حصلنا على معادلة تكاملية ذات نواة متناظرة

مثال: اثبت أن للمعادلة التكاملية الآتية

$$g(x) = \lambda \int_0^{\pi} [\sin x \sin 2t + \sin 2x \sin 4t]\, g(t)\, dt + ax^2 + bx + c$$

حلاً وحيداً من أجل أي قيمة للمعطاة a, b, c, λ ثم أوجد هذه الحلول

$K(x,t) = \sin x \sin 2t + \sin 2x \sin 4t$

$a_1(x) = \sin x \qquad a_2(x) = \sin 2x$

$b_1(t) = \sin 2t \qquad b_2(t) = \sin 4t$

$$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{2} c_i\, a_i(x)$$

$$g = ax^2 + bx + c + \lambda c_1 \sin x + \lambda c_2 \sin 2x \quad (2)$$

[illegible] c_1, c_2

$$f_i + \lambda \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} c_j = c_i \qquad i = 1, 2$$

$$\left.\begin{aligned} f_1 + \lambda \alpha_{11} c_1 + \lambda \alpha_{12} c_2 &= c_1 \\ f_2 + \lambda \alpha_{21} c_1 + \lambda \alpha_{22} c_2 &= c_2 \end{aligned}\right\} (3)$$

$$f_i = \int_0^{\pi} b_i(t)\, f(t)\, dt$$

$$\alpha_{ij} = \int_0^{\pi} b_i(t)\, a_j(t)\, dt$$

$$f_1 = \int_0^{\pi} \sin 2t\, (at^2 + bt + c)\, dt$$

$$= a\int_0^{\pi} t^2 \sin 2t\, dt + b\int_0^{\pi} t \sin 2t\, dt + c\int_0^{\pi} \sin 2t\, dt$$

[illegible]

$$\boxed{f_1 = -\frac{a\pi^2 + b\pi}{2}}$$

$$f_2 = \int_0^{\pi} \sin 4t\, (at^2 + bt + c)\, dt$$

[illegible]

$$\boxed{f_2 = -\frac{a\pi^2 + b\pi}{4}}$$

$$\alpha_{11} = \int_0^{\pi} \sin t \sin 2t\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} [\cos(2t - t) - \cos(2t + t)]\, dt\right] = 0$$

$$\boxed{\alpha_{11} = 0}$$

$$\alpha_{12} = \int_0^{\pi} \sin^2 2t\, dt = \frac{\pi}{2} \qquad \boxed{\alpha_{12} = \frac{\pi}{2}}$$

$$\alpha_{21} = \int_0^{\pi} \sin 4t \sin t\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos(4t - t) - \cos(4t + t))\, dt = 0$$

$$\boxed{\alpha_{21} = 0}$$

$$\alpha_{22} = \int_0^{\pi} \sin 4t \cdot \sin 2t\, dt = 0$$

$$\boxed{\alpha_{22} = 0}$$

/ /

نعوض في (3)

$$C_1 - \frac{\lambda\pi}{2} C_2 = \frac{a\pi^2 + b\pi}{2}$$

$$C_2 = \frac{a\pi^2 + b\pi}{4} \quad (4)$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{\lambda\pi}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

من نظرية فريدهولم المعدلة فإن

حل وحيد من اجل اي قيم للثوابت

a, b, c

لحل ... (4) نحصل

$$C_1 = (a\pi + b)\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2\lambda}{8}\right)$$

$$C_2 = \frac{a\pi^2 + b\pi}{4}$$

نعوض في (2) كل القيم

مثال 12: لتكن لدينا المعادلة التكاملية الآتية

$$g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \lambda \int (3xt + 5x^2t^2)\, g(t)\, dt$$

المطلوب: 1] اوجد القيم الخاصة والتوابع الخاصة الموافقة لكل قيمة خاصة الموافقة للمعادلة التكاملية المتجانسة الموافقة للمعادلة المعطاة

2] اوجد حلول المعادلة التكاملية وذلك من اجل جميع القيم الممكنة α و β

$$k(x,t) = 3xt + 5x^2t^2$$

$a_1(x) = 3x \qquad a_2(x) = 5x^2$

$b_1(t) = t \qquad b_2(t) = t^2$

$$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{2} C_i a_i(x)$$

$$g(x) = \alpha x^2 + \beta x + 3\lambda C_1 x + 5\lambda C_2 x^2 \quad (2)$$

$$f_i + \lambda \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} C_j = C_i \qquad i = 1, 2$$

$$\left.\begin{aligned} f_1 + \lambda \alpha_{11} C_1 + \lambda \alpha_{12} C_2 &= C_1 \\ f_2 + \lambda \alpha_{21} C_1 + \lambda \alpha_{22} C_2 &= C_2 \end{aligned}\right\} (3)$$

$$f_i = \int_a^b b_i(t) f(t)$$

$$\alpha_{ij} = \int_a^b b_i(t)\, a_j(t)$$

ومن المصادفة نحصل

$f_1 = \frac{2}{3}\beta \qquad f_2 = \frac{2}{5}\alpha$

$\alpha_{11} = 2 \quad \alpha_{12} = 0 \quad \alpha_{21} = 0 \quad \alpha_{22} = 2$

نعوض في (3)

$$\left.\begin{aligned} (1 - 2\lambda) C_1 &= \frac{2}{3}\beta \\ (1 - 2\lambda) C_2 &= \frac{2}{5}\alpha \end{aligned}\right\} (4)$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - 2\lambda & 0 \\ 0 & 1 - 2\lambda \end{vmatrix} = (1 - 2\lambda)^2$$

لإيجاد القيم الخاصة $D(\lambda)=0$

$(1-2\lambda)^2=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}$

إيجاد الدوال الخاصة المرافقة للقيمة الخاصة

ومن حل المعادلة المتجانسة المرافقة ① من أجل القيمة الخاصة $\lambda=\frac{1}{2}$

المعادلات الجبرية المتجانسة المرافقة للمعادلات الأصلية ④

$$\begin{cases}(1-1)c_1=0\\(1-1)c_2=0\end{cases}$$

$\Rightarrow 0c_1=0 \Rightarrow \forall c_1$

$0c_2=0 \Rightarrow \forall c_2$

ومنه c_1 و c_2 [illegible] ① [illegible]

[illegible] $g(x)=0$ [illegible]

$g(x)=\frac{3}{2}c_1x+\frac{5}{2}c_2x^2 \quad \forall c_1, c_2$

[illegible] الدوال الخاصة المرافقة

$g_1^{(1)}(x)=\frac{3}{2}x$

$g_1^{(2)}(x)=\frac{5}{2}x^2$

2] لإيجاد حل المعادلة ① [illegible]

$\lambda\neq\frac{1}{2} \Rightarrow D(\lambda)\neq 0$

المعادلة المتجانسة تملك حل وحيد

[illegible] من المعادلات ④

$c_1=\frac{2\beta}{3(1-2\lambda)} \qquad c_2=\frac{2\alpha}{5(1-2\lambda)}$

حل ح ②

$$g(x)=\frac{\alpha x^2+\beta x}{1-2\lambda}$$

[illegible] α, β

الحالة $D(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}$

حل ح ④

$0c_1=\frac{2}{3}\beta \Rightarrow \frac{2}{3}\beta=0$

$0c_2=\frac{2}{5}\alpha \Rightarrow \frac{2}{5}\alpha=0$

متى تكون للمعادلة عدد لا نهائي من الحلول يجب أن تحقق الشرط

$\alpha=\beta=0$

$0c_1=0 \quad \forall c_1$

$0c_2=0 \quad \forall c_2$

[illegible] c_1, c_2 ② [illegible]

[illegible] $\alpha=\beta=0$ [illegible]

$g(x)=\frac{3}{2}c_1x+\frac{5}{2}c_2x^2$

حل ③ [illegible]